

离散不确定广义系统的 H_1 保成本控制

刘岑枫¹, 胡 刚²

(11 暨南大学 华文学院, 广东 广州 510610; 21 广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510090)

摘要: 研究了一类不确定性的离散广义系统的 H_1 保成本控制问题, 基于系统参数矩阵不等式得到了问题可解的充分条件, 并给出了 H_1 保成本控制器的设计方法. 所得到的控制器保证了闭环系统正则、因果、稳定并且满足给定的 H_1 性能指标, 对所有容许的不确定性, 保成本性能指标不超过某个确定的上界. 用数值示例说明了所给方法的有效性.

关键词: 离散广义系统; 保成本控制; 不确定性

中图分类号: TP11

文献标识码: A

文章编号: 100727162(2005)0320034204

近年来, 人们对离散广义系统的研究倾注了巨大的热情, 并取得了较多的研究成果^[1~3]. 本文结合 H_1 控制和保成本控制的思想, 研究了一类不确定离散广义系统的状态反馈 H_1 保成本控制问题. 对所有容许的不确定性, 使得闭环系统因果、正则、稳定, 满足保成本性能指标不超过某个确定的上界和给定的 H_1 性能指标. 基于系统参数矩阵不等式, 得到了系统存在 H_1 保成本控制器的一个充分条件, 并给出了设计方法.

1 问题的描述和准备

考查不确定离散广义系统:

$$\begin{aligned} E x_{k+1} &= (A + \Delta A) x_k + (B + \Delta B) u_k + B_1 w_k, \\ y_k &= C x_k + D u_k. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x_k \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态; $u_k \in \mathbb{R}^m$ 是系统的控制输入; $w_k \in \mathbb{R}^m$ 是平方可积的外部干扰; $y_k \in \mathbb{R}^s$ 是系统的输出. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $\text{rank } E = r [n; A, B, B_1, C, D]$ 是已知的适当维数常数矩阵. ΔA 和 ΔB 是适当维数的不确定矩阵, 并且有以下形式

$$[\Delta A \quad \Delta B] = H F_k [E_1 \quad E_2], \quad F_k^T F_k \leq I, \quad P_k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

其中, H, E_1 和 E_2 是适当维数的常数矩阵; F_k 是不确定矩阵且满足式(2).

系统(1)的性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k), \quad (3)$$

其中, $Q > 0, R > 0$ 是给定的对称加权矩阵.

本文的目的是设计系统(1)的 H_1 保成本控制器

$$u_k = K x_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (4)$$

收稿日期: 200310230

基金项目: 广东省自然科学基金项目(020163)

作者简介: 刘岑枫(1972), 助教, 主要研究方向为保成本控制、容错控制的研究.

为此,首先给出系统(1)的 H_1 保成本控制器的定义.

定义1^[4] 对于不确定系统(1),若存在控制律(4)为其 H_1 保成本控制器,则闭环系统具有性质:1)系统稳定,正则,无脉冲模;2)当系统为零初值时, $\|y(t)\|_2 \leq C\|w(t)\|_2$, 这里 $C > 0$ 为给定的 H_1 性能;3)性能指标 J 存在上确界.

2 主要结论

为了讨论系统(1)的 H_1 保成本控制,给出如下几个引理.

引理1^[2] 考虑广义离散系统

$$\begin{cases} Ex_{k+1} = Ax(k) + B_1 w(k); \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (5)$$

当 $X(k) = 0$ 时,系统(5)是正则、因果且稳定的充要条件是存在可逆对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,使得矩阵不等式(6)、(7)成立.

$$E^T P E \succ 0, \quad (6)$$

$$A^T P A - E^T P E \prec 0. \quad (7)$$

下面用引理1给出系统(1)存在 H_1 保成本控制器的条件1

定理1 对于给定的 H_1 性能 $C > 0$, 若存在可逆对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对式(2)中所有不确定性满足矩阵不等式(6)及

$$C^2 I - B_1^T P B_1 \succ 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & A_c^T P A_c - E^T P E + A_c^T P B_1 (C^2 I - B_1^T P B_1)^{-1} B_1^T P A_c + \\ & (C + DK)^T (C + DK) + Q + K^T R K \prec 0. \end{aligned} \quad (9)$$

则控制器(4)是系统(1)的 H_1 保成本控制器,这里, $A_c = [A + BK + HF_k(E_1 + E_2K)]$.

证明 由不确定系统(1)和控制器(4)组成的闭环系统为

$$Ex_{k+1} = [A + BK + HF_k(E_1 + E_2K)]x(t) + B_1 w_k = A_c x_k + B_1 w_k, \quad y_k = (C + DK)x_k. \quad (10)$$

对于定义1中的性质1,不考虑干扰,即 $w(t) = 0$,由引理1可知,闭环系统正则、因果且稳定1

对于性质2,取Lyapunov函数为 $V(x_k) = x_k^T E^T P E x_k$,则

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= V(x_{k+1}) - V(x_k) = \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_c^T P A_c - E^T P E & A_c^T P B_1 \\ B_1^T P A_c & B_1^T P B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_c^T P A_c - E^T P E + \delta & A_c^T P B_1 \\ B_1^T P A_c & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} - x_k^T \delta x_k + C^2 X^T(t) X(t), \end{aligned}$$

这里, $\delta = (C + DK)^T (C + DK) + Q + K^T R K$, $S = C^2 I - B_1^T P B_1$.

由式(9)及Schur补性质可知

$$\Delta V(x_k) \leq -x_k^T \delta x_k + C^2 w_k^T w_k, \quad (11)$$

因为系统稳定,即 $x(0) = 0$,可推出 $V(0) = 0$,得

$$\sum_{k=0}^j \Delta V(x_k) = \sum_{k=0}^j [-x_k^T \delta x_k + C^2 w_k^T w_k],$$

即

$$V(j) - V(0) \leq \sum_{k=0}^j [-x_k^T (Q + K^T R K) x_k - y_k^T y_k + C^2 w_k^T w_k].$$

由上式可得

$$\sum_{k=0}^1 [x_k^T y_k - C^T w_k^T w_k] [V(\cdot)] - V(0) = \sum_{k=0}^1 [x_k^T (Q + K^T R K) x_k], \quad (12)$$

又由 $V(0) = 0, V(\cdot) \geq 0$ 得

$$+ y_k + 2 [C + w_k + 2.$$

对于性质 3), 由式(12) 及 $V(\cdot) \geq 0$ 可知

$$J = \sum_{k=0}^1 (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) [V(0) + \sum_{k=0}^1 [x_k^T y_k - C^T w_k^T w_k] [V(0) + C^T Q = x_0^T E^T P E x_0 + C^T Q = J^*.$$

其中, $Q = w_k + 2$, 则 J^* 为不确定系统(1)的可保成本指标.

引理 2 对于对称可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 及 $F_k^T F_k \leq I_k$, 若存在可逆对称矩阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $U - H^T P H > 0$, 则

$$(A_0 + H F_k G)^T P (A_0 + H F_k G) [A_0^T (P^{-1} - H U^{-1} H^T)^{-1} A_0 + D^T G], \quad (13)$$

其中, $D = \|K_{\max}(U)\|$.

证明 当 $U - H^T P H > 0, (P^{-1} - H U^{-1} H^T)^{-1} = P + P H (U - H^T P H)^{-1} H^T P$.

$$\text{令 } 8 = A_0^T P H (U - H^T P H)^{-1/2} - G^T F_k^T (U - H^T P H)^{1/2},$$

则有

$$0 \leq 88^T = A_0^T P H (U - H^T P H)^{-1} H^T P A_0 + G^T F_k^T (U - H^T P H) F_k G - A_0^T P H F_k G - G^T F_k^T H^T P A_0,$$

即

$$A_0^T P H F_k G + G^T F_k^T H^T P A_0 + G^T F_k^T H^T P H F_k G [A_0^T P H (U - H^T P H)^{-1} H^T P A_0 + G^T F_k^T U F_k G,$$

故 $(A_0 + H F_k G)^T P (A_0 + H F_k G) [A_0^T P A_0 + D^T G + A_0^T P H (U - H^T P H)^{-1} H^T P A_0^0$,

由于 $(P^{-1} - H U^{-1} H^T)^{-1} = P + P H (U - H^T P H)^{-1} H^T P$,

所以式(9)成立, 证毕.

定理 2 对于不确定离散广义系统(1) 及给定的 H_1 性能 $C > 0$, 若存在对称可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 对所有的容许不确定参数 A, B , 不等式(6)、(7)及不等式(14)、(15)成立

$$U - H^T M H > 0, \quad (14)$$

$$A^T N A - E^T P E + D_1^T E_1 + C^T C + Q - V^T Z^{-1} V < 0 \quad (15)$$

此时, 不确定离散广义系统(1)的 H_1 保成本控制器为

$$K = -Z^{-1} V \quad (16)$$

其中, $S = C^T I - B_1^T P B_1, M = P + P B_1^T S^{-1} B_1 P, N = (M^{-1} - H U^{-1} H^T)^{-1}$,

$V = (A^T N B + D_2^T E_1 + C^T D)^T, Z = B^T N B + D_2^T E_2 + D^T D + R + \alpha$, R 为确定 Z 是可逆的一个尽可能小的非负数.

证明 由定理 1 中式(9)右边等于

$$\begin{aligned} & A_c^T P A_c - E^T P E + A_c^T P B_1 (C^T I - B_1^T P B_1)^{-1} B_1^T P A_c + (C + D K)^T (C + D K) + Q + K^T R K = \\ & A_c^T (P + P B_1^T S^{-1} B_1 P) A_c - E^T P E + (C + D K)^T (C + D K) + Q + K^T R K = \\ & A_c^T M A_c + (C + D K)^T (C + D K) + Q + K^T R K = 71 \end{aligned}$$

由引理 2 及式(14)可知

$$7[(A+BK)^T N(A+BK) + D^T E_1 + E_2 K)^T (E_1 + E_2 K) - E^T P E + (C+DK)^T (C+DK) + Q + K^T R K = A^T N A - E^T P E + C^T C + Q + D E_1^T E_1 + K^T V + V^T K + K^T Z^{-1} K = 7, \quad (17)$$

将式(16)代入式(17)得式(15),由定理(1)可知定理(2)成立,证毕.

3 示例

对于不确定离散广义系统(1)和性能指标(3),考虑

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -0.15 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 \\ 0 & 0.11 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.11 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.11 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.12 \\ 0.11 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.11 \end{bmatrix},$$

正定对称矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$, 假设 $G = 1$, 由定理 2 可知存在

$$U = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 \\ 0 & 0.11 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

则可得不等式(6)、(7)、(14)和(15)同时成立,其中,

$$A^T N A - E^T P E + C^T C + Q + D E_1^T E_1 + K^T V + V^T K + K^T Z^{-1} K = \begin{bmatrix} -0.18487 & -1.18202 \\ -1.18202 & -4.14908 \end{bmatrix} < 0.$$

根据定理 2 可知系统的 H_1 保成本控制器为

$$u_k = [0.13888 \quad -1.11797] x_k.$$

4 结论

对一类不确定离散广义系统和一个二次型性能指标,研究了其 H_1 保成本控制问题.采用矩阵不等式处理方法,导出了系统存在 H_1 保成本控制律的一个充分条件,进而用一个矩阵不等式的可行解给出了 H_1 保成本控制律的一个参数化表示.

参考文献:

- [1] Xu S Y, Yang C W. H_1 state feedback control for discrete singular systems[J]. IEEE Trans Automat contr, 2000, 45(7): 1402-1409.
- [2] Xu S Y, Yang C W. H_1 state feedback control for a class of discrete singular systems[J]. Control Theory and Application, 2000, 17(5): 732-741.
- [3] Fang C, Lee L, Chang F. Robust control analysis and design for discrete-time singular systems[J]. Automatica, 1994, 30(11): 1742-1750.
- [4] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1972, 17(4): 474-483.

(下转第 42 页)

Multi2aim Fuzzy Optimization Design of Latticed Domes with Fuzzy and Reliability Restrict

WANG Hong¹, TANG Shi2ding²

(1. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. Guangdong Corporation of China Coloured Metal Industry, Guangzhou 510080, China)

Abstract: In the optimization design of single layer latticed domes, the used mathematical models without considering uncertain factors have some extents of limitations. Based on the considering of fuzzy and ran2dom quality of each design parameter of single layer latticed domes, a new mult2objection optimization model is established. In this model, the fuzziness of mult2objective function and the stress control criterion are solved. The computation results for single layer latticed domes demonstrate that the model is reasonable and feasible.

Key words: single layer latticed dome; fuzzy optimization; fuzzy and reliability

(上接第 37 页)

H_1 Guaranteed Cost Control for Discrete2time Uncerta in Singular Systems

LIU Cen2feng¹, HU Gang²

(1. Faculty of Chinese Language and Culture, Jinan University, Guangzhou 510610, China;

2. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: The problem of H_1 guaranteed cost control for a class of discrete2time uncertain singular systems is studied. A sufficient condition for the solvability to the problem in terms of certain matrix inequalities is obtained. Furthermore, the H_1 guaranteed cost controller design method is given. The control law guaran2tees that the closed2loop systems is regular, causal, as well as stable, and satisfies a prescribed H_1 norm constraint. The cost of the closed2loop systems is within a certain bound for all these admissible uncertain2ties. Finally, a numerical example is given to illustrate the design method.

Key words: discrete singular systems; guaranteed cost control; uncertainties